

2006 年度

数学おもしろクラブ活動報告（第 8 回・9 月 17 日）

今回は、微分の定義の復習、微分可能性と関数の連続性、そして関数の増加と減少について学習しました。講義内容の一部をご紹介します。

微分可能性と関数の連続性

関数 $f(x)$ が $x = a$ で定義されていて、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。そして、関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば、 $x = a$ で連続であるが、関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で連続でも、 $y = f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるとは限らない。が成り立つことを証明する。関数 $y = f(x)$ が連続であれば $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ である。この定義の式を変形していく。 x を $a + h$ で置き換えると、 $x \rightarrow a$ は $a + h \rightarrow a$ となり、これは h を 0 に近づけることと同じである。よって、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$$

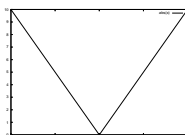
$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) - f(a) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a + h) - f(a)) = 0$$

となる。変形された定義式の左辺が 0 になることを微分可能であることを利用して証明すればよい。 h/h をかけて微分の定義式を作る。

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (f(a + h) - f(a)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \cdot h \\ &= f'(a) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

これで微分可能であれば連続であることが証明された。については、簡単に言うと下図のグラフのように、角ばっているところでは連続であるが微分はできないということである。



数学おもしろクラブ活動報告（第 9 回・10 月 15 日）

今回は、前回に引き続いて関数の増加と減少について学習しました。

定理 関数の増減

関数 $y = f(x)$ が a を含む区間で微分可能とする。このとき

- $f'(a) > 0 \implies f(x)$ は $x = a$ において増加
- $f'(a) < 0 \implies f(x)$ は $x = a$ において減少
- $f'(a) = 0 \implies f(x)$ は $x = a$ において極値を取る

定理 関数の凹凸

関数 $y = f(x)$ が a を含む区間で 2 回微分可能とする。このとき

- $f''(a) > 0 \implies f(x)$ は $x = a$ において下に凸
- $f''(a) < 0 \implies f(x)$ は $x = a$ において上に凸
- $f''(a) = 0 \implies f(x)$ は $x = a$ において変曲点となる

問題

$y = e^{-2x^2}$ のグラフの概形をかけ。

解答

増減表を作成していく。まずは導関数 y' と 2 次導関数 y'' を求める。

$$y' = -4xe^{-2x^2} \quad \text{合成関数の微分の定理を使う}$$

$$y'' = 4e^{-2x^2}(2x+1)(2x-1) \quad \{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

次に極値を探す。 $y' = 0$ となるのは $x = 0$ のときである。

そして変曲点を探す。 $y'' = 0$ となるのは $x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ のときである。

グラフの増減をみるために、 y' の正負を調べる。 e^{-2x^2} は必ず正なので $-4x$ で正負が決まる。 $x < 0$ の時は $y' > 0, x > 0$ の時は $y' < 0$ となる。

グラフが上に凸か下に凸かは、 y'' の正負を変曲点の前で見れば分かる。適当な値を、 y'' に代入して計算する。これで増減表が完成する。

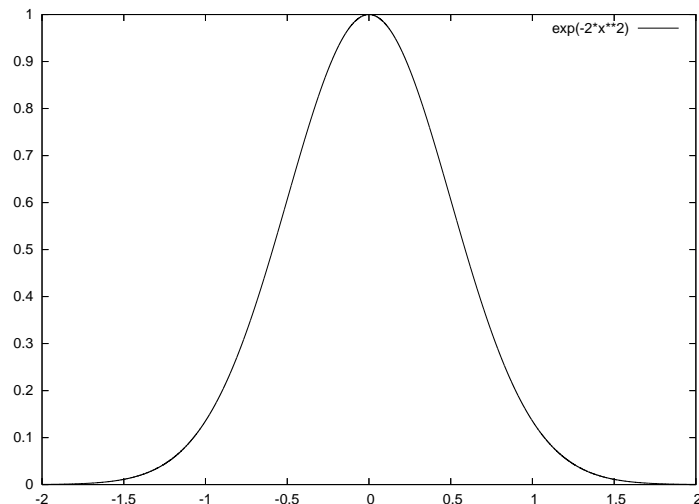
x		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
増減	増加	増加	増加		減少	減少	減少
凹凸	下に凸	変曲点	上に凸	上に凸	上に凸	変曲点	下に凸

最後にグラフの両端をみるため、極限值を求める。

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x^2} = 0 \quad (-2x^2 \text{ は負の無限大に発散する})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x^2} = 0$$

これよりグラフを描くと以下ようになる。



数学おもしろクラブ活動報告 (第 10 回・11 月 19 日)

今回は微分の応用として、平均値の定理、テイラーの定理、マクローリン展開、体積の最大値を求める問題などを学習しました。

テイラーの定理

関数 $f(x)$ が a を含む区間 I において n 回微分可能とする。このとき I の任意の点 x に対して、

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \quad (x < c < a \text{ または } a < c < x)$$

となるような c が存在する。 R_n は剰余項と呼ばれる。

マクローリン展開の定理

関数 $f(x)$ が 0 を含む区間 I において何回でも微分可能とする。このとき、 I において $R_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ならば $f(x)$ は次のようにべき級数展開される。

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

主な関数のマクローリン展開

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots \quad (1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + \cdots \quad (2)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

問題

e^{ix} のマクローリン展開を求めよ。

解答

まずは e^{ix} の微分を行う。

$$\begin{aligned}(e^{ix})' &= i \cdot e^{ix} && \text{(合成関数の微分)} \\ (e^{ix})'' &= (i \cdot e^{ix})' = i^2 \cdot e^{ix} = -e^{ix}\end{aligned}$$

1 回微分することに e^{ix} はそのまま i が一つずつ増えていっている。

$$\begin{aligned}(e^{ix})^{(3)} &= i^3 \cdot e^{ix} = -i \cdot e^{ix} \\ (e^{ix})^{(4)} &= i^4 \cdot e^{ix} = e^{ix} \\ (e^{ix})^{(5)} &= i^5 \cdot e^{ix} = i \cdot e^{ix}\end{aligned}$$

次に $f^n(0)$ が必要だが、 e^{ix} に 0 を代入すると 1 であるので簡単だ。それらをマクローリン展開の定理にあてはめると、

$$\begin{aligned}e^{ix} &= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + i\frac{1}{5!}x^5 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}\end{aligned}\tag{3}$$

(解答終わり)

e^{ix} のマクローリン展開からある公式を導くことができる。式 (3) で i が含まれる項と含まれない項を分けて整理すると、

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \cdots\right) + i \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \cdots\right)$$

右辺の第 1 項は $\cos x$ のマクローリン展開 (2)、第 2 項のカッコ内は $\sin x$ のマクローリン展開 (1) である。よって、

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

これはオイラーの公式である。

活動報告 ～ 第 11 回・12 月 17 日 ～

今回からは積分です。原始関数や不定積分の定義，置換積分，部分積分の定理，その他の積分の公式を学習しました。

原始関数

関数 $f(x)$ に対して

$$F'(x) = f(x)$$

となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という。

不定積分

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の 1 つとする。このとき

$$F(x) + C \quad (C: \text{任意定数})$$

を $f(x)$ の不定積分といい

$$\int f(x) dx$$

と表わす。また C を積分定数という。

置換積分の定理

$x = g(u)$ が微分可能ならば次の式が成立する。

$$\int f(x) dx = \int f(g(u))g'(u) du \quad (4)$$

計算するときには $h(x) = u$ として次式を使ってもよい。

$$\int f(h(x)) dx = \int f(u) \cdot \frac{dx}{du} du \quad (5)$$

問題

$\sin 2x$ の不定積分を求めよ。

解答

置換積分の定理 (2) を使う。 $2x = u$ とおく。両辺を u で微分すると $\frac{dx}{du} = \frac{1}{2}$ となる。

$$\begin{aligned} \int \sin 2x dx &= \int \sin u \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int \sin u du \quad \left(\int cf(x) dx = c \int f(x) dx \quad (c: \text{定数}) \right) \\ &= \frac{1}{2} (-\cos u) + C \quad ((\cos x)' = -\sin x) \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2x + C \quad (u \text{ を } 2x \text{ に戻した}) \end{aligned}$$

活動報告 ～ 第 12 回・2 月 18 日 ～

定積分を学習しました。

定積分の定義

関数 $y = f(x)$ が $[a, b]$ 上で有限の値をとるとする。区間 $[a, b]$ を $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ となる点をとって小区間 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ に分割し, その分割を Δ とする。各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ から点 t_i を選び, リーマン和

$$R = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \quad (x_{i-1} \leq t_i < x_i)$$

をつくる。 $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$ において、 $|\Delta| \rightarrow 0$ となる分割の列を考え、それによる極限值 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} R$ が、各 t_i の選び方に関係なく一定の値に収束するならば、 $f(x)$ は $[a, b]$ で定積分可能といい、その一定の値を次の記号でかく。

$$\int_a^b f(x) dx$$

微分積分学の基本定理

関数 $y = f(x)$ が $[a, b]$ 上で連続とする。

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

とおくと、次のことが成り立つ。

- (1) $S(x)$ は $f(x)$ の原始関数の1つである。
- (2) $F(x)$ を $f(x)$ の任意の原始関数とすると

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

が成立する。この定理より、不定積分を用いて定積分を求めることができるようになる。

問題

$\int_1^e x \cdot \log x dx$ を求めよ。

解答

$$\begin{aligned} \int_1^e x \cdot \log x dx &= \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x dx \quad (\text{部分積分法を用いる}) \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \cdot (\log x)' dx \\ &= \frac{1}{2}(e^2 \cdot \log e - 1^2 \cdot \log 1) - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}(e^2 \cdot 1 - 1 \cdot 0) - \frac{1}{2} \int_1^e x dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2007 年度

活動報告 ～ 第 13 回・4 月 15 日～

講師の紹介

今回から新たに堀越先生をお迎えしました。堀越先生は近畿大学工学部原子炉工学科を卒業され、現在は神戸総合医療専門学校の診療放射線科，臨床工学科，理学療法士科，作業療法士科で数学や物理を担当されています。数学が専門ではない学生に数学を教えている先生ですので、我々にとっても分かりやすい講義になっています。

講義内容

- オリエンテーション（数学の醍醐味）
- 走行距離と速度の関係
- 導関数の定義

活動報告 ～ 第 14 回・5 月 13 日～

講義内容

- 微分と積分の関係、微分と積分のイメージ
- 極限
- 落ちる物の速度と時間
- 平均変化率と微分係数
- 導関数

微分係数

関数 $y = f(x)$ について、 x が a から $a + h$ まで変化するときの平均変化率を $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ とする。
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の値を、関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数といい $f'(a)$ であらわす。

活動報告 ～ 第 15 回・6 月 10 日～

講義内容

- 平均変化率と微分係数（復習）
- 導関数の応用：微分係数の図形的意味
- 導関数の応用：法線
- break time：空気抵抗を受ける落体の運動
- 導関数の応用：関数の増加・減少

法線

曲線上の点 A を通り、点 A における接線と直交する直線を、点 A における曲線の法線という。

曲線 $y = f(x)$ の点 $A(a, f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ であるから、 $f'(a) \neq 0$ のとき点 A における法線の傾きは $-\frac{1}{f'(a)}$ である。

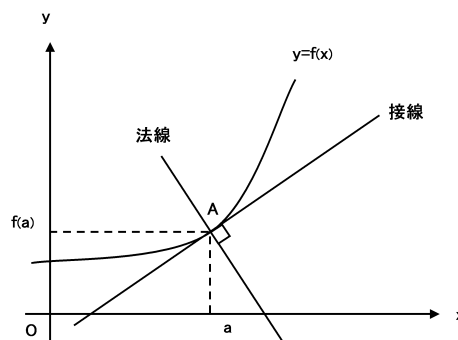
また、 $f'(a) = 0$ のとき、接線の傾きは 0 であるから、接線は、 x 軸に平行である。よって、法線は、点 A を通り、 x 軸に垂直な直線となる。

【法線の方程式】

曲線 $y = f(x)$ の点 $A(a, f(a))$ における法線の方程式は

$$f'(a) \neq 0 \text{ のとき、} \quad y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

$$f'(a) = 0 \text{ のとき、} \quad x = a$$



活動報告 ～ 第 16 回・7 月 8 日～

定理 関数の増減

関数 $y = f(x)$ が a を含む区間で微分可能とする。このとき $f'(a) > 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ において増加， $f'(a) < 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ において減少， $f'(a) = 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ において極値を取る。

問題

$y = x^3 - 3x$ の増加・減少を調べ、グラフを書け。

解答

まずは導関数 y' を求める。

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x^2 - 1) \\ &= 3(x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

$y' = 0$ において x を求めると, $x = \pm 1$ で極値をとることが分かる。

グラフと x 軸との交点は, $x^3 - 3x = 0$ となる点である。

$$x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

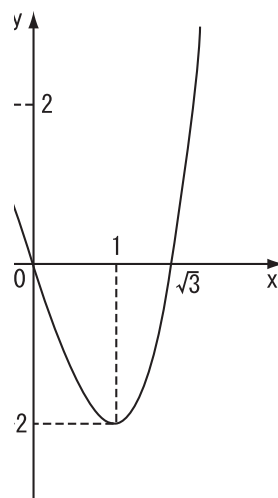
$$x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

となり, $x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ がグラフと x 軸との交点となる。

次に増減表を作る。

x		-1		1	
y'	+	0	-	0	+
y	↗	2	↘	2	↗

これよりグラフを描くと以下のようなになる。



活動報告 ～ 第 17 回・8 月 12 日 ～

講義内容

前回の復習：関数の増減

関数の最大値・最小値の応用：正方形の板から容積最大の箱を作るには

さまざまな関数の導関数：分数関数、無理関数、合成関数

合成関数の微分

関数 $y = f(x), z = g(y)$ がそれぞれ微分可能であれば、合成関数 $z = g(f(x))$ は微分可能で

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

が成り立つ。

大学ではこのように学びますが、高校で学ぶように、

$$\{(f(x))^n\}' = n\{f(x)\}^{n-1} \cdot f'(x)$$

というような、代表的な関数毎の公式として覚えていたほうが、計算する上では楽な場合もある。

問題 次の関数を微分せよ

$$(1) y = (x^2 - x + 1)^3$$

$$(2) y = \sqrt{x^2 - 1}$$

解答

(1)

$$y' = 3(x^2 - x + 1)^2 \cdot (2x - 1)$$

(2)

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}) \\ y' &= \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

活動報告 ～ 第 18 回・9 月 9 日 ～

講義内容

前回の復習：関数の増減

関数とは：関数の定義、逆関数、偶関数、奇関数、周期関数など

極限值

左側極限值・右側極限值

変数 x が a より小さい値をとりながら a に限りなく近づくとき $f(x)$ が一定値 α に限りなく近づくならば、 α を左側極限值といって

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) = \alpha$$

と表す。同じく a より大きい値をとりながら a に近づくとき $f(x)$ が一定値 α に限りなく近づくならば、 α を右側極限值といって

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) = \alpha$$

と表す。 $a = 0$ の場合は $0 - 0$ 、 $0 + 0$ をそれぞれ -0 、 $+0$ と書く。

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ の極限值が α であるための必要十分条件は、右側極限值と左側極限值が共に存在して α に等しくなることである。

問題：極限值を求めよ

$$(1) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty \quad (2) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ の極限は存在しない。}$$

三角関数の極限

定理

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

問題：極限值を求めよ

上の定理が使えるように変形していくのがポイント。

$$\begin{aligned} (1) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 3\theta}{2\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin 3\theta}{3\theta} = \frac{3}{2} \\ (2) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 5\theta}{\sin 2\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5\theta}{5\theta} \cdot \frac{2\theta}{\sin 2\theta} \cdot \frac{5}{2} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5\theta}{5\theta} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 2\theta}{2\theta}} \cdot \frac{5}{2} \right) = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

活動報告 ～ 第 19 回・10 月 14 日 ～

講義内容

関数の連続

対数微分法

関数の連続

関数 $f(x)$ が $x = a$ で定義されていて、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。 $f(x)$ が区間 I で定義されていて、 I のどの点でも連続なとき、 I で連続であるという。

対数微分法

$y = x^a$ を対数微分法で微分し、微分の公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ を示す。 a は任意の実数、 $x > 0$ とする。

$$y = x^a \tag{6}$$

両辺の自然対数をとると

$$\begin{aligned} \log y &= \log x^a \\ \log y &= a \log x \end{aligned} \tag{7}$$

となる。(2)の両辺を x について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log y &= \frac{d}{dx} a \log x \\ \frac{d}{dy} \log y \frac{dy}{dx} &= a \frac{1}{x} && \text{左辺は合成関数の微分} \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{a}{x} \end{aligned}$$

となる。両辺に y を掛け、 $\frac{1}{x}$ は x^{-1} とすると

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y a x^{-1} \\ &= a x^a x^{-1} && (1) \text{を代入した} \\ &= a x^{a-1} \end{aligned}$$

となり、 $y = x^a$ を微分し $(x^a)' = a x^{a-1}$ を示すことが出来た。

活動報告 ～ 第 20 回・11 月 18 日 ～

講義内容

逆三角関数

逆三角関数

区間 $-1 \leq y \leq 1$ の y に対して、 $y = \sin x$ となる x は無限個あり逆関数は考えられない。しかし、狭義単調増加あるいは狭義単調減少である区間に限ればそこで逆関数を作ることができる。

逆正弦関数

$y = \sin x$ の定義域は $(-\infty, \infty)$ で、値域は $[-1, 1]$ である。定義域を $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に限れば増加関数となる(図 1)。この関数の逆関数をアークサインといい、 $y = \sin^{-1} x$ と表す(図 2)。すなわち

$$y = \sin^{-1} x \iff x = \sin y, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

である。正弦関数と逆正弦関数は直線 $y = x$ について対称である(図 3)。

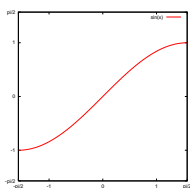


図 1 $y = \sin x$

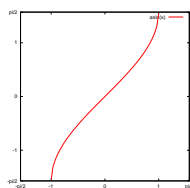


図 2 $y = \sin^{-1} x$

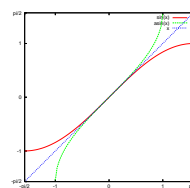


図 3

逆三角関数の導関数

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{8}$$

を証明する。 $y = \sin^{-1} x$ ならば $\sin y = x$ であり、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}x} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\sin y} = \frac{1}{\cos y} \quad (9)$$

となる。 $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ と $\sin y = x$ より

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

この結果を (2) に代入すると (1) となる。

活動報告 ～ 第 21 回・12 月 16 日～

講義内容

高次導関数

$y = f(x)$ の導関数 $y' = f'(x)$ がまた微分可能であるとき、関数 $f'(x)$ の導関数 $\{f'(x)\}'$ を $f''(x)$ で表し、これを $f(x)$ の 2 次導関数という。 $f''(x)$ を次の記号で表すこともある。

$$y'' \quad , \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \quad , \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

さらに、 $f''(x)$ が微分可能であれば、 $\{f''(x)\}'$ を $f'''(x)$ で表し、これを $f(x)$ の 3 次導関数という。

同様に、 $y = f(x)$ を n 回微分して得られる関数を

$$y^{(n)} \quad , \quad \frac{d^n y}{dx^n} \quad , \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n} \quad , \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

などで表し、これを $f(x)$ の n 次導関数という。2 次以上の導関数をまとめて高次導関数という。

$f(x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が存在するとき、 $f(x)$ は n 回微分可能であるという。

任意の n に対して $f^{(n)}(x)$ が存在するとき、 $f(x)$ は無限回微分可能であるという。

例題：次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

$$y = \sin x$$

両辺を逐次、 x で微分すると

$$\begin{aligned} y' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ y'' &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) \\ y''' &= \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\ y^{(4)} &= \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{4\pi}{2}\right) \\ &\dots \\ \therefore y^{(n)} &= \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

ここでは、 $\cos \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ が、うまく使われています。

活動報告 ～ 第 22 回・1 月 13 日～

講義内容

媒介変数表示

媒介変数表示

x と y が同一の変数 t の関数で表されているとする。例えば

$$x = t + 2, \quad y = t^2 + 1 \quad (t \text{ は全ての関数})$$

を考える。この 2 つの式から t を消去すると、

$$y = x^2 - 4x + 5$$

となり、 y は x の関数となる。一般に

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (10)$$

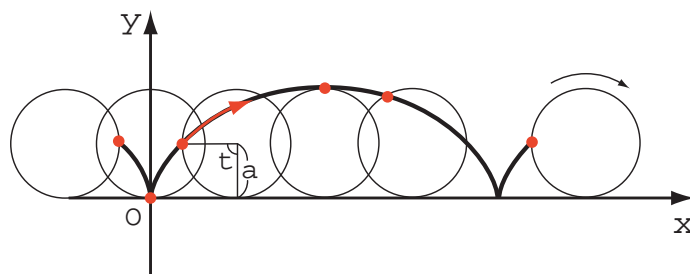
であるとき、これから t を消去して $y = f(x)$ となれば、この方程式 (10) を関数 $y = f(x)$ の媒介変数表示といい、 t を媒介変数またはパラメーターという。

サイクロイド

媒介変数方程式

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0)$$

で表される曲線をサイクロイドという。半径 a の円周上の一点 P を原点 O に重ね、その円を x 軸に沿って滑らないように転がすとき、点 P が描く曲線である。



活動報告 ～ 第 23 回・2 月 17 日～

講義内容

2 次曲線

陰関数

2 次曲線

放物線，楕円，双曲線は，方程式

$$y^2 = 4px, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

で表すことができる。

楕円の焦点は， $a > b > 0$ ， $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ のとき， $(c, 0)$ ， $(-c, 0)$ である。この焦点からの距離の和が一定である点の軌跡が楕円である。

陰関数

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{11}$$

は原点を中心とする半径 1 の円（単位円）を表す。(11) 式を $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とおけば $F(x, y) = 0$ である。このとき， x, y は自由に動けない。11 式を y について解くと， $y \geq 0$ のときは $y = \sqrt{1 - x^2}$ であり， $y < 0$ のときは $y = -\sqrt{1 - x^2}$ となり， y は x の関数である。

このように，一般に 2 つの変数 x と y を含む方程式

$$F(x, y) = 0 \tag{12}$$

は，これを y について解いて得られるいくつかの関数

$$y = f_1(x), y = f_2(x), \dots \tag{13}$$

を表すと考えられる。

このとき，方程式 (12) を関数 (13) の陰関数表示という。また方程式 (12) で表される関数を陰関数という。

2008 年度

活動報告 ～ 第 25 回・4 月 13 日～

講義内容

三角関数のグラフ

微分と力学の関係

三角関数のグラフ

関数

$$y = 3 \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{3} \right) \quad (14)$$

のグラフを書く。

三角関数のグラフを書くためには、その関数を $y = a \sin b(\theta - p) + q$ という形に変えるとよい。式 (14) は

$$y = 3 \sin 2 \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \quad (15)$$

となる。そして $y = \sin \theta$ のグラフ (図 4) を基本として式 (15) のグラフを書いていく。

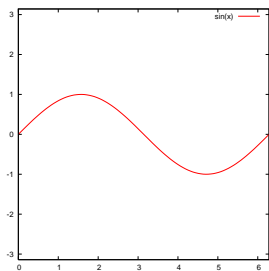


図 4 $y = \sin \theta$

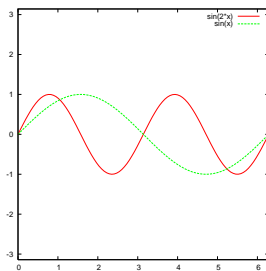


図 5 $y = \sin 2\theta$

$y = \sin 2\theta$ のグラフ (図 5) は、 $y = \sin \theta$ のグラフ (図 4) を θ 軸方向で $1/2$ 倍にしたものである。

また、 $y = 3 \sin 2\theta$ のグラフ (図 6) は、 $y = \sin 2\theta$ のグラフ (図 5) を y 軸方向に 3 倍にしたものである。

そして、 $y = 3 \sin 2 \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)$ のグラフ (図 7) は、 $y = 3 \sin 2\theta$ のグラフ (図 6) を θ 軸方向に $\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものである。

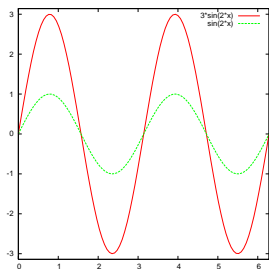


図 6 $y = 3 \sin 2\theta$

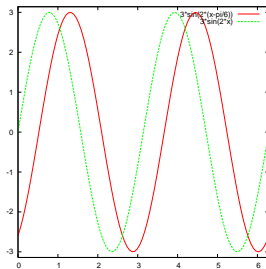
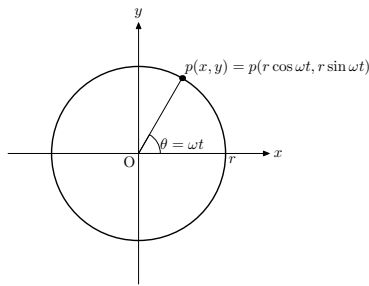


図 7 $y = 3 \sin 2 \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)$

活動報告 ～ 第 26 回・5 月 11 日～

問題

点 P が、原点 O を中心とする半径 r の円周上を、点 $(r, 0)$ から出発し、角速度 ω で動いている。このときの、点 P の (1) 速さ、(2) 速度ベクトルの方向を求めよ。



解答

点 P の座標 (x, y) を三角関数で表すと

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$$

となる。角速度 ω は単位時間当たりの回転角だから、 $\theta = \omega t$ である。

まずは座標の成分ごとに t で微分し、速度ベクトル \vec{v} を求める。

$$(r \cos \omega t)' = r(-\sin \omega t) \cdot (\omega t)' = -r\omega \sin \omega t$$

$$(r \sin \omega t)' = r \cos \omega t \cdot (\omega t)' = r\omega \cos \omega t$$

よって、 $\vec{v} = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$ となる。次に点 P の速さ、すなわち速度ベクトル \vec{v} の絶対値を求める。

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{(-r\omega \sin \omega t)^2 + (r\omega \cos \omega t)^2} \\ &= \sqrt{r^2\omega^2 \sin^2 \omega t + r^2\omega^2 \cos^2 \omega t} \\ &= \sqrt{r^2\omega^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} \\ &= \sqrt{r^2\omega^2} \quad (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1) \\ &= r|\omega| \end{aligned}$$

速度ベクトルの方向を調べるために \vec{v} と \overrightarrow{OP} の内積をとってみる。

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \overrightarrow{OP} &= (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)(r \cos \omega t, r \sin \omega t) \\ &= -r^2\omega \sin \omega t \cos \omega t + r^2\omega \sin \omega t \cos \omega t \\ &= 0 \end{aligned}$$

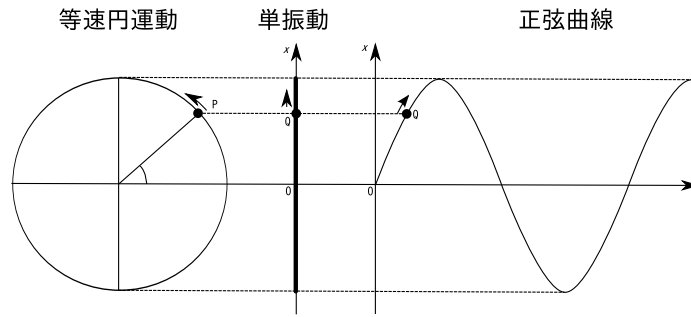
内積が 0 であることから、 \vec{v} は半径 OP と垂直で点 P における接線方向を向いていることがわかる。

活動報告 ～ 第 27 回・6 月 8 日～

単振動

角速度 ω 、半径 A の等速円運動をしている点 P がある。点 P から x 軸に下ろした垂線の足（正射影） Q は、図のように、 x 軸上の原点 O の両側に距離 A の範囲内で往復運動をする。一直線上のこのような振動を単振動という。原点 O から出発した点 Q の t 秒後の座標 x は

$$x = A \sin \omega t \tag{16}$$



となるので、横軸上に時間 t をとると、図のような $x-t$ 図がえられる。このような曲線を正弦曲線という。

単振動する点 Q の速度と加速度の大きさは、等速円運動をする点 P の速度と加速度の正射影から求めることが出来る。等速円運動では $|\vec{v}| = A\omega$, $|\vec{a}| = A\omega^2$ なので、単振動では

$$|\vec{v}| = A\omega \cos \omega t \quad (17)$$

$$|\vec{a}| = -A\omega^2 \sin \omega t \quad (18)$$

となる。(1) と (3) より

$$|\vec{a}| = -\omega^2 x \quad (19)$$

である。

単振動する点 Q が質量 m の物体の場合、運動方程式と式 (4) より

$$F = -m\omega^2 x$$

が得られる。この式は単振動に働く力を表している。 $k = m\omega^2$ として

$$F = -kx$$

と表す。

単振動の周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

となる。

活動報告 ～ 第 28 回・7 月 13 日 ～

統計の復習

【キーワード】

代表値 (平均値、中央値、最頻値) 散らばりの尺度 (範囲、標準偏差) 質的尺度とパレート図、量的尺度とヒストグラム

平均値 :

観測値 x_1, x_2, \dots, x_n の和を、観測値の総数、すなわち、データの大きさ n で割ったものを平均 average という。

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

分散と標準偏差：

各観測値 x_i と平均 \bar{x} との隔たりを偏差という。

偏差では正負両符号が存在するが、2乗することで符号を消し、これらを全て足し合わせ、これらの平均を求めたものをデータの分散 variation という。

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

分散の平均値をとったものを、標準偏差 standard deviation という。

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

【例】ある自動車販売会社の販売員別の月間売り上げ台数のデータ（下表）より平均、分散、標準偏差を求めよう。

販売員	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
Aさん	5	0	0
Bさん	3	-2	4
Cさん	4	-1	1
Dさん	7	2	4
Eさん	6	1	1
総和 Σ	25	0	10

$$\text{平均： } \bar{x} = \frac{5 + 3 + 4 + 7 + 6}{5} = \frac{25}{5} = 5 \text{ 台}$$

$$\text{分散： } S^2 = \frac{0 + 4 + 1 + 4 + 1}{5} = \frac{10}{5} = 2 \text{ 台}^2$$

$$\text{標準偏差： } S = \sqrt{\frac{10}{5}} \doteq 1.4 \text{ 台}$$

活動報告 ～ 第 29 回・8 月 10 日 ～

講義内容

1. 統計学
 - (a) データの種類・尺度
 - (b) 度数分布表
2. 微分積分
 - (a) 偏微分

例題

$z = \frac{x}{x^2 + y^2}$ の偏導関数 z_x を求めよ。

$$z_x = \frac{(x)_x(x^2 + y^2) - x(x^2 + y^2)_x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

活動報告 ～ 第 30 回・9 月 14 日 ～

講義内容

- 統計学
 - 四分位範囲と箱ヒゲ図
- 微分積分
 - 高次導関数

例題

$\sin x$ の n 次導関数を求めよ。

解答

まずは、 $\sin x$ の 1 次導関数を求める。

$$(\sin x)^{(1)} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

式の変形は、 $\sin x$ と $\cos x$ が互いに $\frac{\pi}{2}$ だけ離れた関係にあることを利用している。

2 次の導関数は $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ の導関数を求めればよい。

$$\begin{aligned}(\sin x)^{(2)} &= \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' \\ &= \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

同様にして、3 次、4 次の導関数を求めていく。

$$(\sin x)^{(3)} = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)^{(4)} = \sin\left(x + \frac{4\pi}{2}\right) = \sin x$$

結果を順に見ていくと規則性があることが分かる。また、4 次の導関数でもとの $\sin x$ にもどっている。まとめると、

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

となる。

活動報告 ～ 第 31 回・10 月 12 日～

講義内容

- 統計学
 - 分散と標準偏差
- 微分積分
 - ライブニッツの公式

ライブニッツの公式

関数 $f(x)$ と $g(x)$ が n 回微分可能ならば,

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

問題

$y = x^2 \cos x$ の n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ。ただし, $n \geq 2$ とする。

解答

x^2 は 3 回微分すると 0 になる。よって, ライブニッツの公式の 3 項目までとなる。つまり

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \binom{n}{0} f^{(n-0)}(x)g^{(0)}(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x)g^{(1)}(x) \\ &\quad + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x)g^{(2)}(x) \end{aligned}$$

である。 $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2$ とする。

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

であるので,

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= 1(\cos x)^{(n)}x^2 + \frac{n}{1!}(\cos x)^{(n-1)}(x^2)' \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2!}(\cos x)^{(n-2)}(x^2)'' \\ &= x^2 \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \cos\left\{x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right\} \\ &\quad + n(n-1) \cos\left\{x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right\}. \end{aligned}$$

活動報告 ～ 第 31 回・11 月 9 日～

講義内容

- 統計学

- ばらつきの管理
- 微分積分
 - 全微分
 - 接平面

全微分

微分可能な関数 $f(x)$ について, ある点 a における x の微小増分 Δx に対応する $f(x)$ の増分 $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ は, 近似的に $\Delta f(a) \doteq f'(a)\Delta x$ で与えられる。そこで形式的なシンボル

$$df(x) = f'(x)dx$$

を考え, これを $f(x)$ の全微分という。2 変数の関数 $z = f(x, y)$ では

$$df = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

を $z = f(x, y)$ の全微分という。

「微分する」は「導関数を求める」ことを意味する。一方で「全微分を求める」は, 2 変数の関数でいえば, 「変数 x と y を同時に増やしたとき z がどれくらい増えるのか」を求めることになる。全微分のイメージを図 8 に示す。

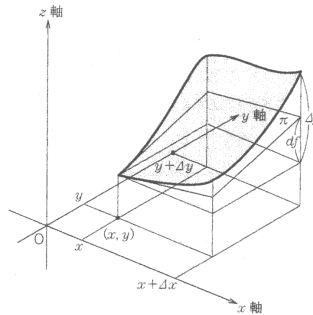


図 8

問題

$z = x^2y^3 + x^3y^2$ の全微分を求めよ。

解答

$$z_x = 2xy^3 + 3x^2y^2$$

$$z_y = 3x^2y^2 + 2x^3y$$

$$dz = (2xy^3 + 3x^2y^2)dx + (3x^2y^2 + 2x^3y)dy$$

活動報告 ～ 第 32 回・12 月 14 日～

講義内容

- 統計学

- 確率
- 確率変数, 確率分布
- 微分積分
 - 全微分
 - 接平面

接平面

$z = f(x, y)$ が (a, b) において全微分可能であるとき, 点 (a, b) における接平面の方程式は

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \quad (20)$$

である。

問題

$f(x, y) = 2y^4 - x^2y + 3$ の点 $(1, -1)$ における接平面の方程式を求めよ。

解答

$$f(1, -1) = 6$$

$$f_x(x, y) = -2xy \quad f_x(1, -1) = 2$$

$$f_y(x, y) = 8y^3 - x^2 \quad f_y(1, -1) = -9$$

これらを式 (20) にあてはめると, 接平面の方程式 z は

$$z - 6 = 2(x - 1) - 9(y + 1)$$

$$z = 2x - 9y - 5$$

となる。

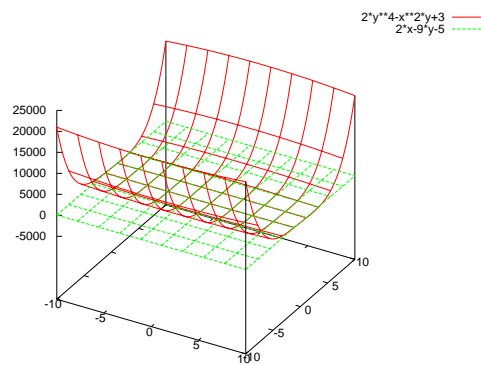


図9 赤線: $f(x, y)$, 緑線: 接平面

活動報告 ～ 第 35 回・2 月 8 日～

講義内容

- 統計学
 - － 相関、相関係数
- 微分積分
 - － 不定積分

相関

2つの量的変数 x と y の関係性を分析するためには、まず、散布図と呼ばれるグラフを作る。散布図とは、それぞれのケースの1つの変数を x 、もう1つの変数を y とし、 xy 平面上の1つの点としてプロットしたものである。2つの変数間で比例関係があるとき、右肩上がりの関係を正の相関、右肩下がりの関係を負の相関と呼ぶ。相関関係の強弱の指標が相関係数 r である。

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

散布図上の相関関係を直線で代表させたものを回帰直線 ($y = ax + b$) という。 a と b を求める式は以下のようになる。

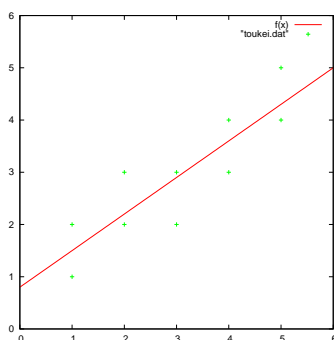
$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$
$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

例題

次の表に示す、店舗ごとの CD の「売り上げ」と「店内で曲を流す回数」の散布図を書き、相関係数、回帰直線を求めよ。

売り上げ	1	5	2	4	5	1	3	2	4	3
店内で曲を流す回数	2	4	2	4	5	1	2	3	3	3

相関係数 $r = 0.9$ となり、強い正の相関がある。回帰直線は $y = 0.7x + 0.8$ となる。



活動報告 ～ 第 36 回・3 月 8 日～

講義内容

- 統計学
 - 相関、相関係数
- 微分積分
 - 指数，対数，三角関数の公式
 - 積分の公式

積分の公式

基本的な関数

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

対数関数

$$(\log |x|)' = \frac{1}{x}, \quad \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$$

$$(\log |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \log(x^2+1) + C$$

三角関数

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

置換積分

$$\int f(ax+b) dx = F(ax+b) \frac{1}{(ax+b)'} + C = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x-3} dx &= \int (2x-3)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2x-3)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3} (2x-3) \sqrt{2x-3} + C\end{aligned}$$

2009 年度

活動報告 ～ 第 37 回・4 月 12 日 ～

講義内容

- 統計学
 - 順位相関係数
- 微分積分
 - 置換積分

置換積分

$F'(x) = f(x)$ であって, $x = \varphi(t)$ が t について微分可能であるとする。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) &= \frac{dF(x)}{dt} \\ &= \frac{dF(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (\text{合成関数の微分}) \\ &= f(x) \varphi'(t) \\ &= f(\varphi(t)) \varphi'(t)\end{aligned}$$

であるから,

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) = F(x) = \int f(x) dx$$

である。よって次の置換積分の定理が成り立つ。

$\varphi(t)$ が微分可能なとき, $x = \varphi(t)$ とおけば

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

となる。

例題 1 $x(x+2)^3$ の不定積分を求めよ。

$t = x + 2$ とおく。 $x = t - 2$ となり、両辺を t で微分すると $\frac{dx}{dt} = 1$ となる。よって $dx = dt$ である。

$$\begin{aligned}\int x(x+2)^3 dx &= \int (t-2)t^3 dt \\ &= \int (t^4 - 2t^3) dt = \int t^4 dt - 2 \int t^3 dt \\ &= \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^4 + C \\ &= \frac{1}{5}(x+2)^5 - \frac{1}{2}(x+2)^4 + C \\ &= \frac{1}{10}(x+2)^4(2x-2) + C\end{aligned}$$

例題 2 $\sin^2 x \cos x$ の不定積分を求めよ。

$t = \sin x$ とおき、 $\frac{dt}{dx} = \cos x$ だから $dt = \cos x dx$ となる。

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

活動報告 ～ 第 38 回・5 月 10 日 ～

講義内容

- 統計学
 - 推定
- 微分積分
 - 部分積分

部分積分

微分可能な関数 $f(x), g(x)$ の積の導関数は

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

である。移項して整理すると

$$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

である。両辺を積分することで次の部分積分の定理が成り立つ。

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

公式にあてはめていくときには、 $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ のどれをあてたのかが分からなくなってしまうがちである。以下のように並べて、矢印の順番で公式にあてはめていくように決めておけば、間違いが少ない。

$$\begin{array}{c} f(x) \xrightarrow{1} g'(x) \\ \searrow^2 \\ f'(x) \xrightarrow{3} g(x) \end{array}$$

例題 1 $x \log x$ の不定積分を求めよ。

$$\begin{aligned} f(x) &= \log x \xrightarrow{1} g'(x) = x \\ &\quad \searrow^2 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \xrightarrow{3} g(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

とおく。対数関数は $f(x)$ とおくのが定石である。 $\log x$ を $g'(x)$ とおいてしまうと $g(x)$ が求められないからである。矢印の 1,2,3 の順に部分積分の公式にあてはめていく。

$$\begin{aligned} \int x \log x dx &= \int \overbrace{\log x \cdot x}^1 dx = \overbrace{\log x \cdot \frac{1}{2}x^2}^2 - \int \overbrace{\frac{1}{x} \frac{1}{2}x^2}^3 dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 + C \end{aligned}$$

活動報告 ～ 第 39 回・6 月 14 日 ～

講義内容

- 統計学
 - － 母比率の区間推定
- 微分積分
 - － 有理関数の積分

部分分数分解を利用して不定積分を求める

例題 $\int \frac{x^2-4x+13}{(x+1)(x-2)^2} dx$ の不定積分を求めよ。

まずは部分分数分解を行う。

$$\frac{x^2 - 4x + 13}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

とおき,

$$x^2 - 4x + 13 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1) \quad (1)$$

とする。(1) に $x = -1$ を代入して $A = 2$, $x = 2$ を代入して $C = 3$ を得る。さらに (1) の両辺の x^2 の項の係数を比較すると, $1 = A + B$ となり, $B = -1$ を得る。よって,

$$\frac{x^2 - 4x + 13}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$$

である。

次に、不定積分を求める。

$$\int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} \right) dx$$
$$= 2 \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x-2} dx + 3 \int \frac{1}{(x-2)^2} dx \quad (2)$$

$$= 2 \log|x+1| - \log|x-2| + 3 \left(-\frac{1}{x-2} \right) + C \quad (3)$$

$$= \log \frac{(x+1)^2}{|x-2|} - \frac{3}{x-2} + C$$

が求める不定積分である。

(2) から (3) への式の変形について説明する。第 1 項と第 2 項は公式

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \log|x+a| + C$$

を用いた。第 3 項は置換積分法を用いている。すなわち、

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} dx = \int (x-2)^{-2} dx$$
$$= \frac{1}{-2+1} (x-2)^{-2+1} \cdot (x-2)'$$
$$= -\frac{1}{x-2}$$

活動報告 ～ 第 40 回・7 月 12 日 ～

講義内容

- 統計学
 - － 検定
- 微分積分
 - － 三角関数の積分

母平均の検定

例題 シャープペンシルの芯を作っている工場で、製品である芯が既定の太さで作られているかをチェックするため、一定期間毎に出来上がった芯から無作為に 100 本を抽出し、太さの平均 \bar{x} と標準偏差 s を調べている。

ある調査での平均値 \bar{x} は 0.92mm、標準偏差 s は 0.07mm であった。母平均 μ 、すなわち一定期間に作った芯のすべての平均が、既定の 0.90mm ではないと言えるのかを、有意水準 0.05 で検定しなさい。

例題の答え

標本サイズ $n = 100$

標本平均 $\bar{x} = 0.92$

標本標準偏差 $s = 0.07$

比較値 $\mu_0 = 0.09$

帰無仮説 H_0 : 母平均は 0.90mm に等しい ($\mu = \mu_0$)

対立仮説 H_1 : 母平均は 0.90mm と異なる ($\mu \neq \mu_0$)

母集団の分布は正規分布であるとし, 母標準偏差は未知ではあるが標本サイズが大きい ($n \geq 100$) ので, 標本標準偏差 s を母標準偏差 σ として Z 検定を行う。

検定統計量 z_0 は

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{0.92 - 0.90}{\frac{0.07}{\sqrt{100}}} \\ &\approx 2.587 \end{aligned}$$

となる。

標準正規分布の両側 5% 点 z は 1.96 であり, $|z_0| > 1.96$ である。よって, 帰無仮説を棄却し, 危険率 5% で母集団の平均は 0.90 でない。

この検定により, 芯は既定の太さで作られていないことがわかる。

活動報告 ～ 第 43 回・10 月 11 日～

講義内容

- 統計学
 - 中心極限定理
- 微分積分
 - 定積分

定積分

例題 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx$ の定積分を求めよ。

倍角の公式より,

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \end{aligned}$$

をえて, 与式に代入する。

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x + 1) dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\sin 2x \cdot \frac{1}{(2x)'} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{2} \left[\sin 2x \cdot \frac{1}{2} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} [\sin 2x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\sin \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right)
\end{aligned}$$

$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ なので

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} \right) \\
&= \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

活動報告 ～ 第 45 回・12 月 20 日～

講義内容

- 統計学
 - 1 標本検定のまとめ
- 微分積分
 - 定積分

定積分

例題 定積分 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}$ の値を求めよ。 a を正の定数とする。

$x = a \sin t$ とおき,

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= a \cos t \\
dx &= a \cos t dt
\end{aligned}$$

とする。 $x = a \sin t$ に $x = 0$ と $x = a$ をそれぞれ代入し,

$$\begin{aligned}
0 &= a \sin t \\
t &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= a \sin t \\
\sin t &= 1 \\
t &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

をえる。さらに、 $\sqrt{a^2 - x^2}$ に $x = a \sin t$ を代入し、

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 t} \\ &= a \cos t\end{aligned}$$

をえる。与式は

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot a \cos t dt &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \quad \text{半角公式より} \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt \right\} \\ &= \frac{a^2}{2} \left\{ [t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} [\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} \right\} \\ &= \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

となる。この問題は、半径 a の円の第 1 象限にある部分の面積を求めている。

活動報告 ～ 第 46 回・1 月 10 日 ～

講義内容

- 統計学
 - － 検定のまとめ
- 微分積分
 - － 定積分

定積分

定理 連続な関数 $f(x)$ について

(1) $f(x)$ が偶関数、すなわち $f(-x) = f(x)$ ならば

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

(2) $f(x)$ が奇関数、すなわち $f(-x) = -f(x)$ ならば

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

例題 定積分 $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x) dx$ の値を求めよ。

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x) dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx$$

$\sin x$ は奇関数, $\cos x$ は偶関数であるので

$$\begin{aligned} &= 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx \\ &= 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$