

数学おもしろクラブ

微積分や統計学を，講師を招いて学習しています。

活動報告 ～ 第 55 回・10 月 10 日～

講義内容

- 統計学（独立性の検定 つづき）
- 微分積分（微分方程式 つづき）

問題 上空から雨滴が初速度 0 ($t = 0, v = 0$) で落下する。速度が小さいときは、速度に比例した空気抵抗を受ける。この雨滴の t 秒後の速度はどうなるか？

解答 力 F ，質量 m ，加速度 a とすると、

$$\text{運動方程式： } F = ma$$

重力加速度を g ，速度を v ，加速度 $a = \frac{dv}{dt}$ ， k を正定数とし、運動方程式は次のように書き換えられる。

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \quad (1)$$

$mg - kv = u$ (2) とおきこの両辺を t で微分して、

$$-k \frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt} \quad \text{これを整理して、}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{k} \frac{du}{dt} \quad (3)$$

(2)、(3) を (1) に代入し、変数を分離して、両辺を t で積分する。

$$\begin{aligned} \int \left(-\frac{m}{k}\right) \frac{1}{u} \frac{du}{dt} dt &= \int dt \\ -\frac{m}{k} \int \frac{1}{u} du &= \int dt \\ -\frac{m}{k} \ln|u| &= t + C \end{aligned}$$

$\ln|u|$ とは、 $\log_e|u|$ を表す。

$u = mg - kv$ に戻して

$$\begin{aligned} -\frac{m}{k} \ln|mg - kv| &= t + C_1 \\ \ln|mg - kv| &= -\frac{k}{m}t + C_2 \\ mg - kv &= \pm e^{C_2} e^{-\frac{k}{m}t} \\ mg - kv &= C_3 e^{-\frac{k}{m}t} \end{aligned}$$

$t = 0, v = 0$ より $C_3 = mg$ よって

$$v = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

次回は12月12日(日)10時から13時まで、
場所は7階多目的室です。

書記：川上 祐司，松崎 仁志
代表：中山 巖