

数学おもしろクラブ

微積分や統計学を，講師を招いて学習しています。

活動報告 ～ 第 45 回・12 月 20 日～

講義内容

- 統計学
 - － 1 標本検定のまとめ
- 微分積分
 - － 定積分

定積分

例題 定積分 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}$ の値を求めよ。 a を正の定数とする。

$x = a \sin t$ とおき，

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a \cos t \\ dx &= a \cos t dt\end{aligned}$$

とする。 $x = a \sin t$ に $x = 0$ と $x = a$ をそれぞれ代入し，

$$\begin{aligned}0 &= a \sin t & a &= a \sin t \\ t &= 0 & \sin t &= 1 \\ & & t &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

をえる。さらに, $\sqrt{a^2 - x^2}$ に $x = a \sin t$ を代入し,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 t} \\ &= a \cos t\end{aligned}$$

をえる。与式は

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot a \cos t dt &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt && \text{半角公式より} \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt \right\} \\ &= \frac{a^2}{2} \left\{ [t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} [\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} \right\} \\ &= \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

となる。この問題は, 半径 a の円の第 1 象限にある部分の面積を求めている。